МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

"Школа №156" городского округа Самара

РАССМОТРЕНО	ПРОВЕРЕНО	УТВЕРЖДАЮ
Руководитель ШМО естественно-математического цикла	Зам.директора по УВР	Директор школы
Синёва Н.А.	Крылова Э.И.	Макаров А.С.
Протокол № 1 от 29.08.2025 г.	29.08.2025 г.	Приказ № 341-од от 29.08.2025 г.

ПРОГРАММА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА ПО МАТЕМАТИКЕ

«Практикум по решению геометрических задач»

для обучающихся 11 класса

Самара 2025 год

Раздел 1. Пояснительная записка

Математическое образование в системе основного общего образования занимает одно из ведущих мест, что определяется безусловно практической значимостью математики, ее возможностями, в развитии формирования мышления человека, ее вкладом в создание представлений о научных методах познания действительности.

Основная задача обучения математики в школе, обеспечить прочное, сознательное овладение учащимися математических знаний и умений необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждого человека, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования.

Рабочая программа элективного курса составлена на основе государственной программы Атанасян Л.С «Программы общеобразовательных учреждений. Геометрия 10-11 классы», составитель Т.А. Бурмистрова, Москва «Просвещение» 2019г., Федерального компонента государственного образовательного стандарта основного общего образования по математике.

Представленная программа элективного курса разработана в рамках реализации концепции предпрофильного обучения на старшей ступени общего образования и соответствует Государственному стандарту среднего образования по математике. При разработке данной программы учитывалось то, что элективный курс как компонент образования должен быть направлен на удовлетворение познавательных потребностей и интересов старшеклассников, на формирование у них новых видов познавательной и практической деятельности, которые нехарактерны для традиционных учебных курсов.

Основное содержание курса соответствует современным тенденциям развития школьного курса математики, идеям дифференциации, углубления и расширения знаний учащихся. Данный курс дает учащимся возможность познакомиться с нестандартными способами решения геометрических задач, способствует формированию и развитию таких качеств, как интеллектуальная восприимчивость и способность к усвоению новой информации, гибкость и независимость логического мышления. Поможет учащимся в подготовке к ЕГЭ по математике, а также при выборе ими будущей профессии, связанной с математикой. В предлагаемом курсе разработана система заданий для подготовки старшеклассников (учащихся 11 классов) к ЕГЭ. Предлагаются к рассмотрению вопросы обязательного курса математики и вопросы, выходящие за рамки школьной программы.

Элективный курс представлен в виде практикума, который позволит систематизировать и расширить знания учащихся в решении задач по математике и позволит начать целенаправленную подготовку к сдаче экзамена в форме ЕГЭ.

- **Цель курса** - обобщение и систематизация знаний учащихся по основным разделам математики, подготовка к итоговой аттестации в форме ЕГЭ.;
- знакомство учащихся с некоторыми методами и приемами решения математических задач;

- формирование умения применять полученные знания при решении «нетипичных», нестандартных задач.

Задачи курса:

- формирование и развитие у старшеклассников аналитического и логического мышления при проектировании решения задачи;
- расширить и углубить представления учащихся о приемах и методах решения геометрических задач;
- формирование опыта творческой деятельности учащихся через исследовательскую деятельность при решении нестандартных задач;
- формирование навыка работы с научной литературой, использования различных интернет-ресурсов;
- развитие коммуникативных и общеучебных навыков работы в группе, самостоятельной работы, умений вести дискуссию, аргументировать ответы и т.д.
- дополнить знания учащихся теоремами прикладного характера, областью применения которых являются задачи;
- помочь овладеть рядом технических и интеллектуальных умений на уровне свободного их использования;
- акцентировать внимание учащихся на единых требованиях к правилам оформления различных видов заданий, включаемых в итоговую аттестацию за курс полной общеобразовательной средней школы;
- развить интерес и положительную мотивацию изучения математики

ОПИСАНИЕ МЕСТА В УЧЕБНОМ ПЛАНЕ

Факультативный курс «Практикум по математике» входит в образовательную область математика.

Согласно учебному плану школы на изучение элективного курса отводится 34 часа в год , 1 час в неделю.

В процессе изучения курса предполагается использование, как традиционных форм обучения, так и самообразование, саморазвитие учащихся посредством самостоятельной работы с методическим материалом. Занятия включают в себя теоретическую и практическую части, в зависимости от целесообразности. Основные формы проведения занятий: дискуссия, консультация, практическое занятие, зачетная работа. Особое значение отводится самостоятельной работе учащихся в рамках практикума по самостоятельному решению задач перед зачетной работой, где допускается использование учебника, помощь учителя. Предполагаются следующие формы организации обучения: индивидуальная, парная, групповая, коллективная, взаимное обучение, самообучение.

Раздел 2. Планируемые результаты освоения учебного предмета

В результате изучения курса учащиеся должны уметь:

- точно и грамотно формулировать теоретические положения и излагать собственные рассуждения в ходе решения заданий;
- уверенно решать задачи на вычисление, доказательство и построение;
- применять аппарат алгебры и тригонометрии к решению геометрических задач;
- уметь определять тип задачи, знать особенности методики её решения, использовать при решении различные способы.

Программа элективного курса способствует формированию у учащихся системного подхода в решении задач с геометрическим содержанием. Это позволяет им при успешном усвоении программы курса, решать задачи как части «В» Единого государственного экзамена, так и в значительной степени продвинуться в умении применять полученные знания при решении задач уровня «*С*».

Раздел 3. Общая характеристика содержания курса и его структура

Программа элективного курса состоит из двух разделов: планиметрия и стереометрия.

Для удобства разделы разбиты не только на параграфы, но и на темы. В каждый из них содержит задачи нескольких уровней сложности: уровень А (задачи для устных упражнений), уровень Б – это задачи базового уровня, уровень В – двух-трех ходовые задачи, требующие применения комплекса знаний по указанной теме. Кроме того, в некоторых темах представлены задачи повышенной сложности. При их решении, учащиеся должны установить и реализовать комплекс внутрипредметных связей. Успешность решения этих задач обусловлена не только владением предметными, но и в значительной степени, высоким уровнем развития общеучебных умений и навыков.

Таким образом, система задач элективного курса предоставляет учителю возможность подбирать задачи, исходя из дидактических целей конкретного учебного занятия с одной стороны, так и в зависимости от уровня подготовки класса – с другой.

Особо отметим тот факт, что в содержание элективного курса включены такие темы как «Методы решения геометрических задач на доказательства», «Понятие опорного элемента и минимального базиса в решении геометрической задачи» и «Правила выполнения выносных чертежей». Изучение этих тем призвано развивать у учащихся умение проводить рассуждения как в письменной, так и в устной формах в тех случая, когда решение геометрической задачи требует доказательства или содержит его в качестве составной части; способствовать развитию умения устанавливать причинно-следственные связи между искомыми и заданными элементами задач через целенаправленный поиск закономерностей в элементах выносного чертежа. Кроме того, эти темы способствует развитию целостного представления о геометрии не только как об учебном предмете, но и как о науке.

Планирование учебного материала составлено таким образом, что оно сопровождает систематический курс геометрии 9-11 классов и не привязано к конкретному учебно-методическому комплексу.

Содержание материала для оценки уровня обученности учащихся по темам элективного курса определяется учителем самостоятельно. Для составления контрольных работ и зачетов он может использовать как дидактические материалы к курсу, так и задачи из собственной методической копилки. Кроме того, он может обратиться и к задачам, опубликованным в литературе (см. список литературы).

Раздел 4. Содержание программы элективного курса

Раздел I. Планиметрия

§ 1. Треугольники.

Треугольник. Признаки равенства треугольников. Равнобедренный треугольник, его признаки и свойства. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Теорема синусов и косинусов. Расширенная теорема синусов. Приемы нахождения медианы в треугольнике. Свойство биссектрисы треугольника.

Прямоугольный треугольник. Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника. Свойство медианы, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника. Формулы для вычисления площадей треугольников.

[Признаки подобия треугольников. Основные конфигурации, связанные с подобием треугольников: примеры отсечения от треугольника подобного исходному. Основная задача подобия]*.

Замечательные точки треугольника. Формулы для вычисления радиусов вписанных и описанных окружностей около треугольников (в том числе, уточненные для частных случаев). [Теоремы Чевы и Менелая].

§ 2. Четырехугольники.

Четырехугольник. Сумма внутренних углов выпуклого четырехугольника. Сумма внешних углов выпуклого четырехугольника.

Параллелограмм и трапеция как классы четырехугольников. Теорема Вариньона. Средние пропорциональные и средние геометрические в трапеции. Основные виды дополнительных построений в трапеции. Ромб, прямоугольник и квадрат как частные виды параллелограмма. Формулы для вычисления площадей основных классов четырехугольников: параллелограммов и трапеций.

Понятие четырехугольника, вписанного или описанного около окружности. Свойства этих конфигураций.

Понятие опорного элемента и минимального базиса в решении геометрической задачи.

§ 3. Окружность. Измерение углов, связанных с окружностью. Пропорциональные линии в круге. Комбинации окружностей.

Окружность и круг. Касательная к окружности, хорда. Дуга окружности, круговой сектор, сегмент, пояс.

Измерение углов, связанных с окружностью. Угол центральный и вписанный. Измерение центральных и вписанных углов. Величина угла, образованного касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности. Величина угла с вершиной внутри круга, вне круга.

---

* Здесь и далее в квадратных скобках указаны темы, желательные, но не обязательные для рассмотрения на учебных занятиях.

Свойства хорд, секущих и касательных. Свойство радиуса, проведенного в точку касания касательной и окружности. Свойство отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки. Свойства дуг, заключенных между параллельными хордами. Свойства диаметра, перпендикулярного хорде. Связи длины отрезков касательной секущей, проведенных к окружности из одной и той же ее точки. Произведение отрезков пересекающихся хорд. Свойства линий в касающихся и пересекающихся окружностях. Свойство линии центров двух касающихся окружностей. Связь расстояния между центрами двух касающихся окружностей и их радиусов (при касании внешнем и внутреннем). Свойство общей касательной двух окружностей, их общей хорды. Необходимое и достаточное условие касания извне двух окружностей.

§ 4. Вычисление площадей. Метод площадей.

Площадь фигуры. Аксиомы площади. Использование свойства аддитивности площади при разбиении и достраивании многоугольника.

Дополнительные теоремы о площадях треугольников. О разбиении треугольника на равновеликие. Об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, по равной высоте. Об отношении площадей треугольников с общим основанием и вершинами, лежащими на параллельной ему прямой.

Дополнительные теоремы о площадях четырехугольников. О площади произвольного выпуклого четырехугольника. О площади четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями. О площади равнобедренной трапеции по высоте, проведенной из вершины тупого угла.

Теорема Пифагора и формула Герона как ключевой момент в решении задач на нахождение площади фигур. Об отношении площадей подобные фигур. Соотношения между элементами фигур при вычислении площадей вписанных и описанных многоугольников.

§ 5. Подобие треугольников в задачах на комбинации окружности и треугольника.

Признаки подобия треугольников. Основные конфигурации, связанные с подобием треугольников: примеры отсечения от треугольника подобного исходному. Основная задача подобия. Использование подобия для установления взаимосвязи элементов в комбинации треугольников с окружностью.

§ 6. Применение тригонометрии в решении планиметрических задач.

Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника. Теоремы синусов, косинусов и тангенсов в треугольнике. Формулы для вычисления площадей фигур с использованием тригонометрических функций.

Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения. Формулы сложения. Формулы двойного аргумента. [Формулы выражения через тангенс половинного аргумента]. Формулы решений основных тригонометрических уравнений.

Раздел II. Стереометрия

§1. Задачи на построение сечения. Вычисление элементов сечения и его площади.

[Методы доказательства в решении стереометрических задач. Задачи на построение. Анализ и доказательства в решении стереометрических задач на построение].

Аксиомы стереометрии и следствия этих аксиом в решении стереометрических задач на построение. Некоторые правила построения сечения. Построение сечения, проходящего через три заданные точки, не лежащие на одной прямой. Построение сечения, проходящего через заданную прямую и не лежащую на ней точку. Приемы вычисления элементов сечения, его периметра и площади.

Р*ешение задач на построение сечений многогранников с условиями параллельности.* Построение сечения, проходящего через заданную прямую параллельно другой заданной прямой. Построение сечения, проходящего через заданную точку, параллельно заданной плоскости. Построение сечения, проходящего через заданную точку параллельно каждой из двух скрещивающихся прямых. Приемы вычисления элементов сечения, его периметра и площади.

[Решение задач на построение сечений многогранников с условиями перпендикулярности. Приемы вычисления элементов сечения, его периметра и площади].

§ 2. Вычисление расстояний и углов в пространстве

Понятие расстояния в пространстве. Расстояние от точки до прямой [задача о вычислении площади треугольника], от точки до плоскости, между скрещивающимися прямыми. [Прием достраивания пирамиды до параллелепипеда при решении задач на вычисление углов и расстояний в пространстве]. Геометрическое место точек пространства, равноудаленных от вершин многоугольника, от сторон многоугольника.

Угол между скрещивающимися прямыми. Угол между прямой и плоскостью, между плоскостями. Двугранный угол.

Место доказательства в решении стереометрических задач на вычисление углов и расстояний в пространстве. Правила выполнения выносных чертежей при вычислении углов и расстояний в пространстве. Определение минимального базиса при решении задачи на вычисление расстояний и углов в пространстве.

§ 3. Комбинации тел.

Понятие комбинации тел. Цилиндры, вписанные и описанные около призм. Конусы, вписанные и описанные около пирамид. [Комбинации цилиндра и тетраэдра, конуса и призмы].
Сферы, вписанные и описанные около прямых призмы, правильных пирамид. [Сферы, вписанные и описанные около произвольных пирамид. Произвольные комбинации сферы с многогранниками. Комбинации серы и правильных многогранников]. Каркасные многогранники.

Комбинации круглых тел.

Выполнение выносных чертежей в решении задач, связанных с комбинациями тел.

Раздел 5. Календарно – тематическое планирование.

По 1 часу в неделю в 11 классе.

№	Тема	Количество часов	Литература
	Планиметрия	16 часов	
1	Треугольники	2 часа	[9], [12], [14]
2	Четырехугольники	2 часа	[10], [12], [14]
3	Окружность. Измерение углов, связанных с окружностью. Пропорциональные линии в круге. Комбинации окружностей	2 часа	[11], [12], [14],[15]
4	Вычисление площадей. Метод площадей	2 часа	[14], [15], [16]
5	Подобие треугольников в задачах на комбинации окружности и треугольника	2 часа	[15]
6	Применение тригонометрии в решении планиметрических задач	2 часа	[13]
7	Практикум по решению задач повышенной сложности	4 часов	[12], [13], [14], [15], [16]
	Стереометрия	4 часа	
Задачи на построение сечений. Вычисление их элементов и площади			
1	Некоторые правила построения сечения многогранников. Построение сечения, проходящего через три заданные точки, не лежащие на одной прямой	1 час	[1] , [5], [6]
2	Построение сечения, проходящего через заданную прямую и не лежащую на ней точку		[1], [5], [6]
3	Построение сечения, проходящего через одну из заданных прямых, параллельно другой прямой	1час	[1], [5], [6]
4	Построение сечения, проходящего через заданную точку параллельно заданной плоскости		[1], [5], [6]
5	Построение сечения, проходящего через заданную точку параллельно каждой из двух заданных прямых	1час	[1], [5], [6]

6	Построение сечения, содержащего условия перпендикулярности		[1], [5], [6]
7	Поэтапно-вычислительный метод решения задач на вычисление элементов сечения и его площади	1час	[1], [4], [5], [6]
Вычисление расстояний и углов в пространстве			
8	Поэтапно-вычислительный метод решения задач на вычисление расстояния от точки до прямой; от точки до плоскости; между скрещивающимися прямыми	2 часа	[1], [3], [5], [6]
9	Поэтапно-вычислительный метод решения задач на вычисление угла между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями	2 часа	[1], [3], [5], [6]
Комбинации тел			
10	Многогранники.	2	
11	Цилиндр и многогранники	1час	[4], [5], [6]
11	Конус и многогранники	1час	[4], [5], [6]
13	Практикум по выполнению выносных чертежей и применению их в решении стереометрических задач на комбинации тел	3 часа	
14	Практикум по решению задач 2 части Единого Государственного Экзамена (отработка оформления геометрических задач)	3 часа	[19]

Всего 34 часа

Раздел 6: Дидактические материалы

Раздел I. Планиметрия

§1. ТРЕУГОЛЬНИКИ

Дидактические цели и задачи: обобщить и систематизировать знания о треугольнике, его частных видах, их свойствах. Формировать навык в применении теорем, связывающих элементы в треугольнике. Основная цель темы – формирование умений «видеть» прием или метод решения, научит школьника формулировать идею решения и составлять ход рассуждений.

Задачи для устных упражнений*

1. Могут ли стороны треугольника относиться как 2:3:6?

Ответ. Нет.

2. В треугольнике ABC: AB = BC, $\angle A = 70°$.

Найдите внешний угол треугольника (рассмотрите все случаи).

3. В треугольнике ABC: медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M, причем, AM =4 см, MA_1 = 2 см, B_1M = 1 см.

Вычислите MB.

4. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке K. Вычислите CK, если AC +CB = 16, AB = 4. Указания. Расстояние от вершины треугольника до точки касания с вписанной окружностью можно выразить через стороны треугольника.

Ответ. 6.

5. В треугольнике ABC AC = 4, AB = 6. Прямая, проходящая через вершину треугольника A и центр вписанной окружности пересекает сторону BC в точке L, причем, LB = 3. Вычислите отрезок CL. Указания. Теорема о биссектрисе угла треугольника; точка пересечения биссектрис является центром вписанного круга.

Ответ. 2.

6. В треугольнике ABC : $\angle B = 30°$, AL – биссектриса угла A, $L \in BC$ и $LK \perp AC$, $K \in AC$. Вычислите длину отрезка LK, если BL = 10. Указания. Свойство биссектрисы угла треугольника.

Ответ. 5.

7. В треугольнике ABC: AB =10, $\angle C = 30°$. KF и KL – серединные перпендикуляры к сторонам BC и AC.

Вычислите AK. Указания. Центр описанного около треугольника круга; теорема синусов.

Ответ. 10.

8. В треугольнике AB: AC = 2, BC = 3, $\angle C = 60°$.

Вычислите AB. Указание. Теорема косинусов.

Ответ. $\sqrt{7}$.

9. В треугольнике ABC: $\angle C = 90°$, $h_c = 3$, $m_c = 5$.

Вычислите площадь треугольника ABC. Указания. Свойство прямоугольного треугольника: $R = c/2 = m_c$.

Ответ. 15.

---

* В решениях задач можно использовать готовый чертеж

10. В треугольнике ABC: $\angle C = 90°$, высота, проведенная к гипотенузе, делит ее на части, равные 4 см и 9 см.

Вычислите значение высоты. Указания. Высота, проведенная из вершины прямого угла, делит треугольник на два подобных.

Ответ. 6.

11. В треугольнике ADC точка B делит сторону AC на два отрезка: 3 см и 1 см.

Вычислите площадь треугольника DBC, если площадь треугольника ADB = 15 см. Указания. Формула площади треугольника, отношение площадей треугольников, имеющих по равной высоте.

Ответ. 5.

12. Верно ли, что в любом треугольнике $4rRp = abc$? Указания. Формулы площади треугольника.

Ответ. Да.

Уровень Б

1. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана боковой стороны равна 5 см.

Найдите длину боковой стороны. Указания. Метод «удвоения медианы».

Ответ. 6 см.

2. Найти периметр прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна c, а радиус вписанной окружности равен r. Указания. Свойство отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки.

Ответ. $2c + 2r$.

3. В треугольнике даны длины двух сторон b и c и угол α между ними.

Найдите длину биссектрисы, проведенной к третьей стороне. Указания. Метод площадей.

Ответ. $2\,bc\cos(\alpha/2)/\,b+c$.

4. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основание 12 см и высотой 8 см, проведена касательная, параллельная основанию.

Найдите длину отрезка этой касательной, заключенного между сторонами треугольника. Указания. Подобие треугольников.

Ответ. 3 см.

5. В треугольнике ABC AB = 13, BC = 7, BM = 4, где M – середина стороны AC.

Найдите площадь треугольника ABC. Указания. Теорема об отношении площадей треугольников, имеющих равные высоты.

Ответ. $14\sqrt{3}$.

6. Точки касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки длиной m и n.

Найдите площадь треугольника.

Ответ. *nm*.

Уровень В

1. Определите вид треугольника, если его медианы 3, 4, 5.

Указание. Подобие треугольников, отношение отрезков медиан.

Ответ. остроугольный.

2. В треугольнике ABC AB = CH, где H – ортоцентр треугольника ABC.

Найдите угол C. Указания. Подобие треугольников.

Ответ. 45°.

3. В треугольнике ABC BC = a, $\angle A = \alpha$, I- центр вписанного круга.

Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCI.

Указания. Теорема синусов, формулы тригонометрии.

Ответ. $a/2\ cos(\alpha/2)$.

4. В прямоугольном треугольнике расстояние от центра вписанного круга до вершин острых углов равны $\sqrt{10}$ и $\sqrt{5}$.

Найдите стороны треугольника. Указания. Теорема косинусов, свойство центральных и вписанных углов, радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности.

Ответ. 3, 4, 5.

5. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$. Биссектриса угла A делит противолежащую сторону на отрезки длиной 4 см и 5 см.

Найдите площадь треугольника. Указания. Свойство биссектрисы угла треугольника.

Ответ. 54 см^2.

Дополнительные задачи

Прямоугольный треугольник

1. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит прямой угол в отношении 1:2 и равна m.

Найдите стороны треугольника.

Ответ. $m, m\sqrt{3}, 2m$.

2. Точка, взятая на гипотенузе прямоугольного треугольника и одинаково удаленная от его катетов, делит гипотенузу на отрезки 30 см и 40 см.

Найдите катеты.

Ответ. 56 и 42 см.

3. Найдите биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника, катеты которого равны 18 см и 24 см.

Ответ. $9\sqrt{5}$ и $8\sqrt{10}$ см.

4. Периметр прямоугольного треугольника равен 60 см, а высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см.

Найдите стороны треугольника.

Ответ. 15, 20, 25 см.

Равнобедренный треугольник

5. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана, проведенная к его боковой стороне, равна 5 см.

Найдите боковую сторону.

Ответ. 6 см.

6. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 4 см, а медиана, проведенная к его боковой стороне, равна 3 см.

Найдите основание треугольника.

Ответ. $\sqrt{10}$ см.

Произвольный треугольник

7. (ЕГЭ, 2004 г.*)Две стороны треугольника равны a и b, а медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны.

Найдите третью сторону треугольника.

Ответ. $((a^2+b^2)/5)^{0,5}$

---

*Задача представлена в общем виде

§2. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Дидактические цели и задачи. Обобщить и систематизировать знания о четырехугольниках, их видах (параллелограммах и трапециях) и свойствах. Формировать навык в применении теорем, связывающих элементы в четырехугольнике.

Основная цель темы – формирование навыка использования алгебраического метода решения геометрических задач, умения выделять опорный элемент и устанавливать взаимосвязь с другими элементами заданной конфигурации, формирование устойчивого навыка использования поэтапно-вычислительного метода. Реализация внутри предметных связей: треугольник-четырехугольник.

Задачи устных упражнений.

1. В произвольном четырехугольнике ABCD диагонали AC и BD пересекаются под углом 30° и равны соответственно 2 и 1.

Вычислите площадь этого четырехугольника. Указания. Вычисление площади произвольного четырехугольника через его диагонали и угол между ними.

Ответ. 0, 5.

2. Может ли средняя линия трапеции пройти через точку пересечения диагоналей? Указания. Диагонали трапеции разбивают ее на треугольники, два из которых, прилежащие к основания, подобны.

Ответ. Нет.

3. В четырехугольнике ABCD AB || CD , AB = 2, CD = 3, AD = BC, DB – биссектриса.

Найдите периметр этого четырехугольника. Указания. Признак трапеции и свойство ее углов.

Ответ. 9.

4. Окружность касается оснований трапеции ABCD и ее боковой стороны AB, причем, ее она делит точкой касания К на два отрезка BК =1 и AК = 4.

Найдите диаметр окружности. Указания. Свойство биссектрис, проведенных из вершин боковой стороны трапеции.

Ответ. 4.

5. AECF, ABCD и AMCN – прямоугольники.

Почему равны MN, EF, BD? Указания. Свойство диагоналей прямоугольника.

6. ABCD – параллелограмм, AB = 3, AD = 8, BDD = 7.

Вычислите AC. Указания. Равенство, связывающее длины сторон и диагоналей параллелограмма.

Ответ. $\sqrt{24}$.

7. ABCD – ромб. К, L, M, P – середины его сторон.

Определите вид четырехугольника. Указания. Свойство диагоналей ромба. *Ответ*. Прямоугольник.

8. Окружность вписана в четырехугольник ABCD. AB = 2, BC = 3, CD = 4.

Вычислите AD. Указания. Свойство описанного четырехугольника.

Ответ. 3.

9. Трапеция ABCD вписана в круг. AB = 3, BC = 2, AD = 4.

Доказать, что существует вписанная в нее окружность. Указания. Свойство вписанного четырехугольника.

Уровень Б

1. В каком отношении делит площадь трапеции средняя линия, если основания трапеции равны *a* и *b*?

Ответ ($3a+b)/(a+3b)$.

2. Стороны параллелограмма равны 23 и 11, а диагонали относятся как 2:3.

Найдите диагонали.

Ответ. 20 и 30.

3. Основания трапеции равны 4 и 16 см.

Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей, если известно, что окружности существуют.

Ответ. 4 см и $5\sqrt{41}/4$ см.

4. Центр круга, вписанного в прямоугольную трапецию, отстоит от концов боковой стороны на 2 и 4 см. Найдите площадь трапеции. Ответ. 14, 4 см^2.

Уровень В

1. В каком отношении прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и параллельная основаниям делит площадь трапеции с основаниями a и b?

Ответ. $a(a^2 + 3ab)/b(b^2 + 3ab)$.

2. Найдите площадь трапеции, если длины ее диагоналей 13 и 15 м, а высота трапеции 12 м.

Ответ. 84 м^2.

3. В трапеции ABCD (CB || AD). AB = CD, $\angle$ BCA = $\angle$DCA, BC= 3, периметр трапеции равен 42.

Найдите площадь трапеции.

Ответ. 96.

4. Доказать свойство вписанного в окружность четырехугольника, диагонали которого перпендикулярны: площадь четырехугольника равна полусуммы произведений противоположных сторон.

5. Доказать, что если боковые стороны трапеции перпендикулярны, то сумма квадратов диагоналей такой трапеции равна сумме квадратов ее оснований.

6. В трапеции ABCD каждое из оснований AD и BC продолжено в обе стороны. Биссектрисы внешних углов A и B трапеции пересекаются в точке K, а внешних углов C и D в точке E. KE = 2*a*. Найдите периметр трапеции. Ответ 4*a*.

7. Найдите площадь ромба ABCD, если радиусы окружностей, описанных около Δ ABC и ΔABD равны R и r.

Ответ. $8r^3R^3/(r^2+R^2)^2$.

Дополнительные задачи

Параллелограмм и его виды

1. Стороны параллелограмма 8 и 3; биссектрисы двух смежных углов параллелограмма, прилежащих к большей стороне, делят противолежащую сторону на три части.

Найдите каждую из них.

Ответ. 3, 2, 3.

2. Параллелограмм с периметром 44 разделен диагоналями на 4 треугольника. Разность между периметрами двух смежных треугольников равна 6.

Найдите длины сторон параллелограмма.

Ответ. 14 и 8.

3. Перпендикуляр, опущенный из вершины параллелограмма на его диагональ, делит ее на отрезки 6 см и 15 см.

Найдите стороны и диагонали параллелограмма, если известно, что разность сторон равна 7 см.

Ответ. 17, 10, 21, $\sqrt{337}$ см.

4. Диагонали прямоугольника равны 8 и пересекаются под углом 60°.

Найдите меньшую сторону прямоугольника.

Ответ. 4.

5. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямоугольника на его диагональ, делит ее в отношении 1:3.

Найдите длину диагонали, если известно, что точка ее пересечения с другой диагональю удалена от большей стороны на расстояние, равное 2.

Ответ. 8.

6. Найдите стороны и углы четырехугольника с вершинами в серединах сторон ромба, диагонали которого равны 6 и 10 .

Ответ. 3, 5, 3, 5, 90 °, 90 °, 90 °, 90 °.

7. Острый угол A ромба ABCD равен 45 °, проекция стороны AB на строну AD равна 12.

Найдите расстояние от центра ромба до стороны CD.

Ответ. 6.

8. Найдите расстояние от центра ромба до его стороны, если острый угол ромба равен 30 °, а сторона равна 4. Ответ.1.

Трапеция

9. В равнобедренной трапеции острый угол равен 60 °.

Докажите, что меньшее основание равно разности большего основания и боковой стороны.

10. В равнобедренной трапеции высота равна 10, а диагонали взаимно перпендикулярны.

Найдите среднюю линию трапеции.

Ответ. 10.

11. Высот равнобедренной трапеции, опущенная из вершины меньшего основания , делит большее основание в отношении 1:3.

Найдите отношение оснований трапеции.

Ответ.1:2.

12. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне.

Найдите углы трапеции.

Ответ. 60 °, 60 °, 120 °, 120 °.

13. Один из углов трапеции равен 30 ° , а прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом.

Найдите меньшую боковую сторону трапеции, если ее средняя линия равна 10, а одно из оснований равно 8.

Ответ.2.

14. Диагональ равнобедренной трапеции равна 10 и образует угол, равный 60 ° с основанием трапеции.

Найдите среднюю линию трапеции.

Ответ. 5.

15. Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 3, а большая образует угол, равный 30 °, с одним из оснований.

Найдите это основание, если на нем лежит точка пересечения биссектрис при другом основании.

Ответ. 9.

§ 3. ОКРУЖНОСТЬ. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ, СВЯЗАННЫХ С ОКРУЖНОСТЬЮ. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ЛИНИИ В КРУГЕ. КОМБИНАЦИИ ОКРУЖНОСТЕЙ

Дидактические цели задачи. Активизировать знания и умения учащихся решать задачи на применение соотношений между отрезками, углами в окружности. Установление внутри предметных связей. Развитие наблюдательности.

Задачи устных упражнений

1. Точки А, В, С делят окружность на три дуги, причем, $\cup$AB: $\cup$BC : $\cup$AC + 1 : 6 : 2. Найдите углы треугольника АВС. Указание. Измерение вписанных углов.

Ответ. 20°, 120°, 40°.

2. Вершины квадрата ABCD и произвольная точка О лежат на окружности.

Доказать, что $\angle$BOA = $\angle$AOD = $\angle$DOC. Указание. Равные хорды стягивают равные дуги.

3. Точки С, D, К лежат на окружности. Через точку К проведена касательная АВ.

Найдите $\angle$DKB, если $\angle$ К = 50°. Указание. Измерение угла между хордой и касательной.

Ответ. 50°.

4. Точки A, B, C, D лежат на окружности. AC – биссектриса угла A.

Найдите подобные треугольники, если AC пересекает BD в точке O. Указание. Свойство вписанных углов, опирающихся на одну дугу.

Ответ. ΔOBC, ΔABC.

5. Первая окружность вписана в угол AOC и касается его сторон в точках A и C. Вторая окружность вписана в угол BOD и касается его сторон в точках B и D(точка D лежит на луче OC).

Найдите CD, если OA = a, OB = b. Указание. Свойство касательных, проведенных из одной точки к окружности.

Ответ. $a - b$.

6. Две различные хорды окружности, пересекаясь, образуют отрезки длиной 6 и 3, x и 2. Вычислите x. Указание. Свойство пересекающихся хорд.

Ответ. 9.

7. Из точки A к окружности проведены касательная AK и секущая AC, причем, AC = 16, AK = 8.

Найдите AB, B – точка пересечения AC с окружностью. Указания. Свойство пересекающихся хорд.

Ответ. 4.

8. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O, OK$\perp$BC, KD$\|$AB. Доказать, что OD$\perp$AC. Указания. Свойство диаметра, перпендикулярного хорде.

9. Окружности радиусов 3 и 5 касаются.

Найдите расстояние между их центрами. Указание. Точка касания окружностей лежит на линии их центров; $O_1O_2 = R_2 \pm R_1$.

Ответ. 2 и 8.

Уровень Б

1. К окружности радиуса r из одной точки проведены секущая, проходящая через центр окружности, и касательная, равная половине секущей.

Найдите отрезок касательной. $\frac{4}{3}$R.

2. Окружности 3 и 5 касаются друг друга в точке A. Прямая, проходящая через A, пересекает окружность большего радиуса в точке B, а меньшего – в точке C.

Найдите длину AB, если BC= $2\sqrt{5}$.

Ответ. $5\sqrt{5}$, $5\sqrt{5}/4$.

3. Радиус окружности равен 7 см. Из точки, удаленной от центра на 9 см, проведена секущая так, что она делит окружность пополам.

Определите длину секущей.

Ответ. 8 см.

4. Две хорды, длины которых 6 см и 8 см, пересекаются.

Найдите отрезки первой хорды, если вторая делится на отрезки 2 и 4 см.

Ответ. $(4 + 2\sqrt{2})$ см и $(4 - 2\sqrt{2})$ см.

5. К окружности радиуса r проведены четыре касательные, образующие ромб, большая диагональ которого равна 4r.

Определите площадь фигуры, ограниченной двумя касательными, проведенными из одной точки, и меньшей дугой окружности, заключенной между точками касания.

Ответ. $R^2(2\sqrt{3} - \pi)/6$.

Уровень В

1. Найдите радиус окружности, вписанной в криволинейный треугольник, образованный полуокружностью диаметра AB и двумя полуокружностями, построенных на радиусах OA и OB, как на диаметрах, если AB = 4R.

Ответ $\frac{2}{3}$R.

2. Через точки P и Q пересечения двух окружностей проведены их общие секущие AA_1 и BB_1.

Докажите, что AB и A_1B_1 параллельны.

3. Окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Пусть A и B – точки касания их общей касательной соответственно с первой и второй окружностями, A_1 – точка, диаметрально противоположная точке A. Отрезок A_1B пересекает окружность в точке M.

Найдите $A_1M : MB$.

Ответ. R : r.

4. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом.

Найдите площадь круга, вписанного в криволинейный треугольник, образованный этими окружностями и их внешней касательной.

Ответ. $\pi R^2 r^2/(r^{0,5} + R^{0,5})^4$.

5. Две окружности касаются одновременно обеих сторон прямого угла.

Найдите отношение их радиусов, если одна из окружностей проходит через центр другой.

Ответ. $(2-\sqrt{2})/2$, $(2-\sqrt{2})$.

6. Окружность проходит через вершины B, C, D трапеции ABCD и касается стороны AB в точке B.

Найдите длину диагонали BD, если длины оснований равны a и b.

Ответ $(ab)^{0,5}$.

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ. МЕТОД ПЛОЩАДЕЙ

Дидактические цели и задачи. Развитие умений решать задачи алгебраическим методом, выбирать при решении задачи в качестве опорного элемента площадь (собственно реализовывать метод площадей при решении задач). Отработка навыка в использовании поэтапно-вычислительного метода в решении планиметрических задач.

Уровень Б

1. В треугольнике основание на 4 меньше высоты, а площадь этого треугольника равна 96.

Найдите основание и высоту треугольника.

Ответ. 12; 16.

2. Катеты прямоугольного треугольника относятся, как 5:6, а гипотенуза равна 122.

Найдите отрезки гипотенузы, отсекаемые высотой.

Ответ. 50, 72.

3. Около трапеции ABCD описана окружность радиуса 6. Центр этой окружности лежит на основании AD. Основание BC равно 4.

Найдите площадь трапеции.

Ответ. $32\sqrt{2}$.

4. В треугольнике ABC даны три стороны: AB = 26, BC = 30 и AC = 28.

Найдите часть площадь этого треугольника, заключенную между высотой и биссектрисой, проведенной из вершины B.

Ответ. 36.

5. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором AB = BC, $\angle$ ABC = 120°. Расстояние от середины стороны AB до основания AC равно a.

Найдите площадь круга, вписанного в треугольник ABC.

Ответ. $12\pi a^2(7-4\sqrt{3})$.

6. Площадь равнобедренной трапеции равна 32. Котангенс угла между диагональю и основанием равен 2.

Найдите высоту трапеции.

Ответ. 4.

7. Диагональ равнобедренной трапеции делит тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3, периметр равен 42.

Найдите площадь трапеции.

Ответ. 96.

8. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{13}$, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 2.

Ответ. $\sqrt{3}$.

Уровень В

2. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 10, а его площадь 12.

Найдите радиус окружности, вписанной в этот четырехугольник.

Ответ. 1,2.

3. Сумма двух противолежащих сторон описанного четырехугольника равна 12, а радиус вписанной окружности равен 5.

Найдите площадь четырехугольника.

Ответ. 60.

4. Боковая сторона треугольника разделена в отношении 2:3:4, считая от вершины, и из точек деления проведены прямые, параллельные основанию.

В каком отношении разделилась площадь треугольника?

Ответ. 4:21:56.

5. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины B прямого угла опущена высота BK на гипотенузу AC. Известно, что AK=5, AB = 13.

Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ. 202, 8.

6. Средняя линия трапеции равна 10 и делит площадь трапеции в отношении 3:5.

Найдите основания трапеции.

Ответ. 15, 5.

7. В равнобедренную трапецию площадью 32 вписана окружность радиуса 2.

Найдите боковую сторону трапеции.

Ответ.7.

8. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равно 10, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12.

Ответ. 75.

9. Найдите площадь треугольника, если две стороны его соответственно равны 27 и 29, а медиана третьей стороны 26.

Ответ. 270.

10. Найдите площадь треугольника ABC, если AC=3, BC=4, а медианы AK и BL взаимно перпендикулярны.

Ответ. $\sqrt{11}$.

11. На стороне AD ромба ABCD взята точка M, причем MD = 0,3AD и BM = MC = 11.

Найдите площадь треугольника BCM.

Ответ. $20\sqrt{6}$.

12. Окружность, вписанная в треугольник, точкой касания делит одну из сторон на отрезки длиной 3 и 4, а противолежащий этой стороне угол равен 120°.

Найдите площадь треугольника.

Ответ. $4\sqrt{3}$.

13. Вершины треугольника соединены с центром вписанного круга. Проведенными отрезками площадь этого треугольника разделилась на три части: 28, 60, 80.

Найдите стороны треугольника.

Ответ. 14, 30, 40.

§ 5. ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ В ЗАДАЧАХ НА КОМБИНАЦИИ ОКРУЖНОСТИ И ТРЕУГОЛЬНИКА*

Дидактические цели и задачи. Формирование навыка использования подобия треугольников для нахождения элементов в комбинациях окружности и треугольника.

1. В равнобедренном треугольнике высота равна 20, а основание относится к боковой стороне, как 4:3.

Найдите радиус вписанного круга.

Ответ. 8.

2. В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении 12:5, а боковая сторона равна 60.

Найдите основание треугольника.

Ответ. 50.

3. В равнобедренном треугольнике радиус вписанного круга составляет $\frac{2}{7}$ высоты, а периметр этого треугольника равен 56.

Найдите стороны треугольника.

Ответ. 16, 20, 20.

4. В равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна 100, а основание 60, вписан круг.

Найдите расстояние между точками касания, находящимися на боковых сторонах.

Ответ. 12.

5. В треугольнике ABC известно, что AB = 15, BC= 12, AC = 18.

В каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису угла C?

Ответ. 2:1.

6. Точка на гипотенузе, равноудаленная от катетов, делит гипотенузу на отрезки длиной 30 и 40.

Найдите катеты треугольника.

Ответ. 42, 56.

7. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 20, а диаметр описанной окружности равен 25.

Найдите радиус вписанной окружности.

Ответ. 6.

---

* В данных задачах предлагается использовать подобие для нахождения элементов планиметрических конфигураций

§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИИ В РЕШЕНИИ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Сумма двух неравных высот равнобедренного треугольника равна l, угол при вершине равен α. Найдите боковую сторону.

2. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. Найдите отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

3. Высота равнобедренной трапеции равна h, а угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. Найдите среднюю линию трапеции.

4. В прямоугольном треугольнике даны его площадь S и острый угол α. Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника до гипотенузы.

5. Основание равнобедренного треугольника равно a, угол при вершине равен α. Найдите длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне.

6. Около круга радиуса R описана равнобедренная трапеция с острым углом α при основании. Найдите периметр трапеции.

7. Площадь прямоугольной трапеции равна S, острый угол равен α. Найдите высоту трапеции, если ее меньшая диагональ равна большему основанию.

Раздел II. Стереометрия

§1. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЯ, ВЫЧИСЛЕНИЕ ЕГО ЭЛЕМЕНТОВ И ПЛОЩАДИ

Дидактические цели и задачи: сформировать умение строить сечения, определять его вид, вычислять элементы и площадь.

ТЕМА 1. **Некоторые правила построения сечения многогранника. Построение сечения, проходящего через три заданные точки, не лежащие на одной прямой**

Уровень А

1. Через вершину A_1 и середины боковых ребер BB_1 CC_1 прямой треугольной призмы ACB $A_1B_1C_1$ проведено сечение.

Вычислите его периметр, если AA_1 =6см, AB=AC=4 см, BC=3см.

2. Через вершину A_1 и середины ребер AB и AC правильной треугольной призмы ACB $A_1B_1C_1$ проведено сечение.

Вычислите его периметр, если BC=16 см, AA_1 =6см.

3. Через вершину и середины двух противолежащих сторон правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение.

Вычислите его площадь, если сторона основания равна 12 см, а высота равна 5 см.

4. Через вершину и середины двух соседних сторон основания правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение.

Вычислите его периметр, если сторона основания пирамиды равна 8 см, а боковое ребро – 5 см.

5. Основанием пирамиды MABC является прямоугольный треугольник. Угол A равен 60°, угол C равен 90°, AB = 8 дм. Высота пирамиды MA равна 6 дм.

Вычислите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки B, C и середину высоты пирамиды.

Уровень Б

1. Проведите сечение куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$, содержащее точки A, C и середину ребра A_1D_1 .

Какой фигурой является сечение? Найдите его периметр, если ребро куба равно *a*.

2. Проведите сечение правильной треугольной призмы ABC $A_1B_1C_1$ плоскостью, содержащей середины ребер AA_1, BB_1 и BC.

Найдите периметр сечения, если все ребра призмы равны *a*.

3. Основание пирамиды MABCD – прямоугольный треугольник, стороны которого 9 см и 12 см. Боковое ребро MD перпендикулярно плоскости основания. Постройте сечение пирамиды плоскостью, содержащей точки A, C и середину высоты MD.

Вычислите площадь сечения, если угол между плоскостями сечения и основания равен 30°.

Уровень В

1. Проведите сечение правильной треугольной призмы ABC $A_1B_1C_1$ плоскостью, содержащей вершину A_1 середины ребер CC_1, BC.

Вычислите периметр сечения призмы, если высота ее равна 6 см, а сторона основания – 8 см.

2. Проведите сечение правильной четырехугольной призмы ABCD $A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, содержащей вершину D_1 и середины ребер AB и BC.

Вычислите его периметр и площадь, если высота призмы равна 14 см, а сторона основания – 16 см.

3. Проведите сечение куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер C_1D_1, CC_1 и AB.

Какой фигурой является сечение? Найдите его периметр, если ребро куба равно *a*.

Задачи повышенной сложности

1. В пирамиде SABCD с вершиной S диагональ BD делится диагональю AC в отношении 3:2, считая от вершины D. На ребрах SD и SA взяты точки P и M соответственно, причем SP:PD=2:5, SM=MA.

а) Построить сечение пирамиды плоскостью MBP.

б) Найти, в каком отношении секущая плоскость делит ребро SC.

в) Найти площадь сечения, если площадь треугольника PQR равна 100 см^2 (R и Q – точки пересечения секущей плоскости с прямыми DA и DC соответственно).

2. Дана пирамида SABCD, основание которой – параллелограмм ABCD, M и P – середины ребер SA и SD.

а) Построить сечение пирамиды плоскостью AMP.

б) Определить, в каком отношении плоскость AMP делит ребро SC.

3. Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины сторон AB и CB основания проведено сечение. Длина стороны основания равна a, а угол между плоскостью сечения и плоскостью основания равен α.

Найдите:

а) площадь сечения;

б) угол между плоскостью сечения и плоскостью боковой грани SCA.

ТЕМА 2. **Построение сечения, проходящего, через заданную прямую и не лежащую на ней точку**

Уровень А

1. Проведите сечение куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ через вершину D_1 и диагональ AC нижнего основания.

Найдите периметр этого сечения, если ребро куба равно a.

2. Через диагональ AC и вершину D_1 правильной четырехугольной призмы ABCD $A_1B_1C_1D_1$ проведено сечение. Ребро основания призмы равно 20 см, угол при вершине сечения равен 60 °.

Вычислите площадь сечения.

3. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро- 6 см.

Вычислите площадь сечения призмы, проведенного через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания.

4. Через вершину и диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение.

Вычислите его площадь, если сторона основания 8 см, а боковое ребро пирамиды равно $5\sqrt{2}$ см.

5. Все ребра тетраэдра равны 24 см. Через боковое ребро и середину не пересекающей его стороны основания проведено сечение.

Вычислите периметр этого сечения.

6. Через вершину правильной шестиугольной пирамиды и диаметр окружности, описанной около ее основания, проведено сечение.

Вычислите площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна 4 см, а ее высота равна 5см.

Уровень Б

1. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник, катеты которого равны 6 см и 8 см. Высота призмы равна 5 см. Через больший катет нижнего основания и середину гипотенузы верхнего основания проведена плоскость.

Вычислите площадь сечения призмы этой плоскостью

2. Через сторону нижнего основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро. Косинус угла между этой плоскостью и плоскостью основания равен $\frac{2}{5}$.

Вычислите площадь сечения призмы данной плоскостью, если сторона основания равна 6 см.

***ТЕМА 3.* Построение сечения, проходящего через одну из заданных прямых, параллельно другой прямой**

Уровень А

Через вершину D_1 и середину ребра AD куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, параллельная прямой AC. Поведите сечение куба этой плоскостью.

Вычислите периметр сечения, если ребро куба равно 16 см.

Уровень Б

1. Проведите сечение куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной прямой A_1C_1 и проходящей через точку Аи середину ребра A_1B_1.

Какой фигурой является это сечение? Вычислите площадь сечения, если ребро куба равно 24 см.

2. Через основание высоты правильной четырехугольной пирамиды MABCD и середину ребра MC проведено сечение плоскостью, параллельной ребру AB.

Вычислите площадь сечения, если сторона основания и высота пирамиды равна 4 см.

3. Все ребра пирамиды MABC равны 24 см. Через середину ребра MC и вершину B проведена плоскость параллельная прямой AC.

Вычислите периметр и площадь полученного сечения.

Уровень В

1. Проведите сечение куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины D_1 и B, параллельно прямой A_1C_1.

Какой фигурой является сечение? Найдите площадь сечения, если ребро куба равно a.

2. Основании пирамиды MABCD – ромб. AC = 24 см, BDB = 21 СМ. Боковое ребро MA перпендикулярно плоскости основания, MA = 48 см. Через вершину A и середину ребра MC проведена плоскость, параллельная прямой BD.

Вычислите площадь полученного сечения.

Задачи повышенной сложности

1. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD через середины сторон AB и AD проведена плоскость, параллельная боковому ребру SA. Найдите площадь сечения, если сторона основания a, а боковое ребро $в$.

Ответ. $5ав\sqrt{2}/16$

2. На ребрах AA_1 и CC_1 параллелепипеда ABCD $A_1B_1C_1D_1$ расположены точки M и N так, что $AM:AA_1 = m$, $CN:CC_1 = n$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки M и N параллельно диагонали BD основания. Определите, в каком отношении эта плоскость делит ребро BB_1, считая от B.

Ответ. $m+n/2-m-n$.

3. Точка M лежит на ребре BC = a куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ ($A_1B_1C_1D_1$ – нижнее основание).

а) Постройте сечение этого куба плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости A_1BD.

б) Найдите площадь сечения, если BM = $\frac{a}{4}$. Указания. Разбейте полученное сечение на две равнобедренные трапеции и вычислите площадь каждой).

Ответ. $S_{сеч} = 11a^2\sqrt{3}/16$.

***ТЕМА 4.* Построение сечения, проходящего через заданную точку параллельно заданной плоскости**

Уровень А

Через середину стороны AB основания тетраэдра DABC проведено сечение плоскостью, параллельной боковой грани DBC.

Вычислите периметр и площадь сечения, если все ребра тетраэдра равны 6 см.

Уровень Б

1. Основанием прямой призмы является ромб, сторона которого равна a, а угол - 60°. Высота призмы равна h. Проведите сечение призмы плоскостью, которая содержит середину одной из сторон основания, параллельна боковому ребру и плоскости меньшего диагонального сечения.

Найдите периметр и площадь сечения призмы.

2. Через середину высоты треугольной пирамиды проведено сечение плоскостью, параллельной плоскости основания.

Вычислите площадь сечения, если стороны основания равны 5 дм, 12 дм, 13 дм.

3. Через середину ребра MC правильной пирамиды MABC проведено сечение плоскостью, параллельно грани MAB.

Вычислите его площадь, если сторона основания пирамиды равна 16 см, а боковое ребро - 17 см.

4. Через середину ребра AD правильной пирамиды MABCD проведено сечение плоскостью, параллельной грани DMC.

Вычислите площадь сечения, если апофема пирамиды равна $6\sqrt{2}$ дм и наклонена к плоскости основания под углом 45°.

Уровень В

1. Через середины ребер AB и BC правильной четырехугольной пирамиды MABCD проведена плоскость, параллельная ребру MB.

Вычислите площадь сечения, если сторона основания равна 8 см, а высота пирамиды – 7 см.

2. Все ребра тетраэдра равны а. Через точку пересечения медиан одной его грани проведена плоскость, параллельная другой грани.

Найдите площадь полученного сечения.

Задачи повышенной сложности

В кубе ABCD $A_1B_1C_1D_1$ через точку M, принадлежащую ребру BB_1 такую, что $MB : MB_1 = 1:3$, проведите сечение, параллельное плоскости A_1BC_1. Найдите периметр и площадь сечения, если ребро куба равно *a*.

Ответ. $P=9a\sqrt{2}/4$; $S=9a^2\sqrt{3}/32$.

***ТЕМА 5.* Построение сечения, проходящего через заданную точку параллельно каждой из двух заданных прямых**

Уровень Б

Все ребра треугольной пирамиды MABC равны 12 см. Через основание ее высоты проведено сечение плоскостью, параллельной ребрам AB и MC.

Найдите площадь сечения.

Уровень В

1. Через середину бокового ребра правильной треугольной пирамиды проведено сечение, плоскость которого параллельна двум скрещивающимся ее ребрам.

Найдите его площадь, если сторона основания *а*, боковое ребро – *в*.

2. Через центр основания правильной треугольной пирамиды проведено сечение плоскостью, параллельной двум ее непересекающимся ребрам.

Вычислите площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна 3 см, а боковое ребро – 6 см.

Задачи повышенной сложности

1. Дан куб ABCD $A_1B_1C_1D_1$ с ребром *a*; O – точка пересечения диагоналей AC и BD грани ABCD.

а) Постройте сечение куба плоскостью α: $O\in\alpha$, $B_1D \,||\, \alpha$, $A_1C_1 \,||\, \alpha$.

б) Найдите площадь сечения.

Ответ. Сечение – равнобедренный треугольник,

$S= a^2 \sqrt{6}/4$.

2. Дан куб ABCD $A_1B_1C_1D_1$ с ребром *a*; O – точка пересечения диагоналей AB_1 и BA_1 грани AA_1B_1B.

Найдите длину стороны сечения, проходящей через точку O, и площадь этого сечения, если α: $O\in\alpha$, $B_1D \,||\, \alpha$, $A_1C_1 \,||\, \alpha$. Указания. Разбейте полученное сечение на равнобедренный треугольник и равнобедренную трапецию и вычислите площадь каждой фигуры.

Ответ. $PF= a\sqrt{5}/2$; $S_{сеч}= 7a^2 \sqrt{6}/16$.

3. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ – равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC, равной 2 см. Высота призмы равна 4 см, точки К и М – середины ребер BB_1 и BC соответственно.

Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точку B_1 параллельно прямым AК и AM, и найти его площадь.

Ответ. $\sqrt{11}$ см^2

4. В параллелепипеде ABCD $A_1B_1C_1D_1$ точки O и O_1 соответственно – точки пересечения диагоналей граней оснований соответственно, точка M принадлежит отрезку A, причем AM: MC = 3.

а) Постройте сечение параллелепипед а плоскостью, проходящей через точку M параллельно прямым A O_1 и DO.

б) Найдите, в каком отношении секущая плоскость делит отрезок A_1C.

Ответ. б) 1:1; в) 5:1, считая от вершины A_1.

***ТЕМА 6 - 7.* Построение сечения, содержащего условия перпендикулярности**

Уровень Б

1. Через боковое ребро правильной треугольной призмы проведено сечение, плоскость которого перпендикулярна плоскости противолежащей боковой грани.

Найдите его площадь, если боковое ребро призмы равно *в*, сторона основания –*a*.

2. Через диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение плоскостью, перпендикулярной боковому ребру.

Вычислите площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна 2 м, угол между плоскостями соседних боковых граней - 120 °.

Уровень В

1. Проведите сечение куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A и C, перпендикулярной диагонали D_1B.

Найдите площадь сечения, если ребро куба равно a.

2. Через сторону основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противолежащей боковой грани.

Сравните площади основания пирамиды и полученного сечения.

3. Через основание высоты правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная боковому ребру.

Найдите площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна ее высоте и равна a.

4. Через ребро основания правильной треугольной пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная боковому ребру.

Вычислите площадь сечения, если ребро основания равно 4 см.

Задачи повышенной сложности

5. Дан куб ABCD $A_1B_1C_1D_1$. Через точку P, лежащую на диагонали AC_1 и такую, что $AP=2PC_1$, проведена плоскость, перпендикулярная этой диагонали.

а) Постройте сечение.

б) Найдите его площадь, если ребро куба равно a.

Ответ. $\sqrt{3}\, a^2/2$

6. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания равна 2, а боковое ребро SA = 6. Через среднюю линию KL боковой грани ABS (KL || AB) проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру SC. Найдите: а) площадь сечения; б) угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

Ответ. $S_{сеч} = \sqrt{26}/12$; $\cos\varphi = \sqrt{702}/27$.

7. Построить сечение куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точку M – середину ребра AA_1, перпендикулярно диагонали B_1D и найдите площадь этого сечения, если ребро куба равно a.

Ответ. $3\sqrt{3}\, a^2/4$.

8. Основание пирамиды KABCD - квадрат со стороной, равной 4 см. Ребро KA перпендикулярно плоскости ABC; KB =5 см, AH – высота треугольника ABK.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину AK перпендикулярно AH.

б) Найдите площадь сечения.

в) *Определите* величину угла между секущей плоскостью и плоскостью основания пирамиды.

Ответ. $S_{сеч}$ = 15/2 см^2; φ = arccos 0,2.

§2. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ И УГЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

Дидактические цели и задачи: научиться строить и вычислять расстояния, углы в многогранниках; научиться осуществлять обоснованные переходы от стереометрических углов к углам планиметрическим.

***ТЕМА 8*. Расстояния от точки до прямой, от точки до плоскости, между скрещивающимися прямыми**

Уровень А

1. В кубе ABCD $A_1B_1C_1D_1$ с ребром a вычислите расстояния от вершины B_1 до:

а) вершин противолежащего основания;

б) до каждого из ребер противолежащего основания;

в) до диагоналей противолежащего основания.

Найдите расстояние между прямыми B_1B и AC; между B_1B и AD.

2. Через точку пересечения диагоналей квадрата ABCD проведите перпендикуляр НО к его плоскости, равный $a\sqrt{2}$, AB = 2a. Найдите расстояния:

а) между прямыми МО и АВ;

б) между прямыми BD и МС;

в) от точки О до плоскости МВС;

в) от точки D до плоскости МВС.

Уровень Б

1. В прямоугольном параллелепипеде ABCD $A_1B_1C_1D_1$ AA_1:AB:AD = 1:3:4. На ребре AD задана точка P – середина этого ребра, AA_1=a.

Найдите расстояние между прямыми B_1P И DD_1.

Ответ. $6a/\sqrt{13}$

2. Боковые грани правильной треугольной призмы - квадраты со стороной a.

Найдите расстояние между диагональю боковой грани и скрещивающимися с ней высотами основания.

Ответ. $a\sqrt{5}/5$, $a\sqrt{2}/2$.

3. Ребро куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ равно а. Найдите расстояние между прямыми B_1C и DC_1.

Ответ. $a\sqrt{3}/3$.

Задачи повышенной сложности

1. $ABCDA_1A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, у которого $AB=4$ дм, $B_1C_1=3$ дм, $AA_1=6$ дм. Точка K_1 принадлежит ребру C_1B_1, причем $C_1K_1:K_1B_1=1:2$.

Вычислите расстояние между прямой BB_1 и плоскостью DD_1K_1.

2. $ABCDA_1A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, у которого $AB=2$дм, $B_1C_1=6$ дм, $AA_1=4$ дм. Точка K_1 принадлежит ребру C_1B_1, причем $C_1K_1:K_1B_1=1:2,$ точки F и F_1 – середины ребер DC и D_1C_1 соответственно. Точки L и L_1 – середины ребер AB и A_1B_1 соответственно, точка M_1 принадлежит ребру A_1D_1 и делит его в отношении $1:2$, считая, от вершины A_1.

Вычислите расстояние между плоскостями KK_1F_1 и LL_1M_1.

3. В кубе $ABCDA_1A_1B_1C_1D_1$ с ребром x вычислите расстояние между прямыми MN и FB_1, где точки M и N – соответственно середины ребер BC и DC, а точка F делит ребро AA_1 в отношении $1:3$, считая от вершины A.

4. В кубе $ABCDA_1A_1B_1C_1D_1$ с ребром y вычислите расстояние между прямыми MN и FD_1, где точки M и N – соответственно середины ребер AB и AD, а точка F делит ребро AA_1 в отношении $1:3$, считая от вершины A.

5. В правильной четырехугольной пирамиде* $ABCDM$ с основанием $ABCD$ и высотой MO вычислите расстояние от точки B_1 – середины ребра MB_1 до плоскости AB_1C (B_1 – середина ребра MB), если ребра основания равны a, а боковые ребра – $2a$.

6. В правильной треугольно пирамиде* $ABCD$ с основанием ABC и высотой DO вычислите расстояние от точки A_1 – середины ребра AD до плоскости AC_1B (C_1 – середина CC_1), если ребра основания равны b, а боковые ребра – $2b$.

7. Найдите угол между двумя скрещивающимися медианами двух боковых граней правильного тетраэдра с ребром a.

Ответ. $a\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. *Указание*. Необходимо достроить тетраэдр до параллелепипеда.

ТЕМА 9. **Углы между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями**

Уровень А

Дан куб ABCD $A_1B_1C_1D_1$.

Найдите угол между:

1) прямыми:

а) DC_1 и C_1D; б) BD и CC_1; в) BD и A_1C_1; г) AD и B_1C; д) PE и AC;

е) PE и D_1C_1; ж) A_1C и BD. Точки P и E – середины A_1B_1 и B_1C_1 соответственно.

2) прямой DC_1 и плоскостями граней куба. Найдите косинус угла между прямой AC_1 и плоскостью ABC.

3) плоскостями:

а) AB_1C_1 и ABC; б) BB_1D_1 и AA_1C.

Уровень Б

1. $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ – куб. Найдите угол между:

а) прямой DB_1 и плоскостями граней куба;

б) прямой A_1D и плоскостью BDC_1.

Ответ. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}/2$; $\arcsin\sqrt{6}/3$.

2. $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка E – середина ребра A_1D_1.

Найдите угол между прямой BE и плоскостью BDD_1.

Ответ. $\operatorname{arctg}\sqrt{17}/17$.

3. В плоскости α расположен правильный треугольник ABC со стороной a. На перпендикуляре к плоскости α в точке A расположен отрезок AD, равный a.

Найдите угол между прямыми AB и CD.

Ответ. $\arccos\sqrt{2}/4$.

4. В правильном тетраэдре найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через апофемы боковых граней тетраэдра.

Ответ. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}/4$.

Задачи повышенной сложности

1. В основании пирамиды $MABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC. Ребро MA пирамиды перпендикулярно плоскости ABC, и $MA=AC=BC$. На ребре MB взяты точки P_1, P_2, P_3, такие, что $BP_1=P_1P_2=P_2P_3=P_3M$.

Найдите углы между следующими прямыми: *а)* CP_1 и AP_3;*б)* CP_3 и AP_1.

2. На ребрах AD и B_1C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отношением ребер $AB:AD:AA_1=1:2:2$ взяты соответственно точки P и Q – середины этих ребер.

Найдите углы, которые образует с плоскостью A_1CD следующие прямые: *а)* PQ; *б)* PB_1.

3. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$. Ребро основания AB параллелепипеда относится к его высоте, AA_1 как $2:3$, точка K – середина ребра CC_1.

Найдите углы, которые образует плоскость AB_1K со следующими плоскостями: *а)*BCC_1; *б)*ABB_1.

4. В основании пирамиды $MABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC. Ребро MA пирамиды перпендикулярно плоскости ABC, и $MA=AC=BC$. На ребре MB взяты точки P_1, P_2, P_3, такие, что $BP_1=P_1P_2=P_2P_3=P_3M$.

Найдите углы между следующими прямыми: *а)* CP_1 и AP_3;*б)* CP_3 и AP_1.

5. На ребрах AD и B_1C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отношением ребер $AB:AD:AA_1=1:2:2$ взяты соответственно точки P и Q – середины этих ребер.

Найдите углы, которые образует с плоскостью A_1CD следующие прямые: *а)* PQ; *б)* PB_1.

6. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$. Ребро основания AB параллелепипеда относится к его высоте, AA_1 как $2:3$, точка K – середина ребра CC_1.

Найдите углы, которые образует плоскость AB_1K со следующими плоскостями: *а)*BCC_1; *б)*ABB_1.

§3. КОМБИНАЦИИ ТЕЛ

Дидактические цели и задачи: научить строить изображения комбинаций тел и их отдельные виды – выносные чертежи; научить устанавливать взаимосвязь между элементами заданной комбинации; научить сознательно выбирать пути рассуждения и способы решения задач, определять объем и полноту письменного решения.

ТЕМА 10-11.МНОГОГРАННИКИ. Цилиндр и многогранники

Уровень А

1. Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра. Высота призмы 20 см, сторона основания 16 см.

Вычислите объем цилиндра.

2. В цилиндр, высота которого 12 см, вписана правильная четырехугольная призма. Площадь ее диагонального сечения равна 120 см^2.

Вычислите объем цилиндра.

3. Правильная треугольная призма вписана в цилиндр. Высота цилиндра 10 см, радиус его основания $4\sqrt{3}$ см.

Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

Уровень Б

1. Около цилиндра описана правильная четырехугольная призма. Ее диагональ равна 17 см, а диагональ боковой грани – 15 см.

Вычислите объем цилиндра.

2. Призма, основание которой – прямоугольный треугольник с катетами 8 см и 6 см, описана около цилиндра. Диагональ большей боковой грани призмы наклонена к основанию под углом 45°.

Вычислите:

а) диаметр основания цилиндра;

б) площадь боковой поверхности цилиндра.

3. Параллелепипед вписан в цилиндр.

Вычислите отношение площадей боковой поверхности цилиндра и диагонального сечения параллелепипеда.

4. В цилиндр вписана призма, основанием которой является равнобедренный треугольник. Его основание 6 см, а боковая сторона 9 см. Площадь боковой поверхности призмы 240 см^2.

Вычислите:

а) объем цилиндра;

б) расстояние между образующими цилиндра, лежащими в равных боковых гранях призмы.

Уровень В

1. В цилиндр вписана треугольная призма. Площадь ее боковых граней равна 54 см^2, 56 см^2, 72 см^2. Ось цилиндра расположена в плоскости одной из боковых граней. Вычислите площадь полной поверхности цилиндра.

2. Около цилиндра, осевое сечение которого - квадрат со стороной 8 см, описана призма. Ее основанием является прямоугольная трапеция. Площадь боковой поверхности призмы 288 см^2.

Вычислите:

а) длину большей стороны основания призмы;

б) объем призмы.

3. Около цилиндра, высота которого 15 см, а радиус основания 4 см, описана правильная четырехугольная призма.

Вычислите площадь полной поверхности призмы.

Задачи повышенной сложности

4. Ребра AB и CD правильного тетраэдра ABCD являются диаметрами оснований цилиндра.

Найдите:

а) отношение объема цилиндра к объему тетраэдра;

б) угол между образующей цилиндра и прямой AC;

в) угол между плоскостью основания цилиндра и плоскостью BCD.

Ответ. 3π; $\pi/4$; arccos $\sqrt{3}/3$.

5(ЕГЭ-2004, вариант 001). На окружности основания цилиндра отмечены точки A и B такие, что дуга AB равна 60°. На окружности другого основания отмечены точки C и D рак, что CD – диаметр, перпендикулярный прямой AB.

Найдите объем пирамиды ABCD, если объем цилиндра равен 32π, а плоскость ACD образует с плоскостью основания угол 45°.

Ответ. $\frac{32}{3}$.

ТЕМА 12. Конус и многогранники

Уровень А

1. Правильна четырехугольная пирамида описана около конуса. Высота пирамиды 20 см. Образующая конуса 25 см.

Вычислите:

а) объем конуса;

б) площадь боковой поверхности пирамиды.

2. Правильная треугольная пирамида вписана в конус. Сторона ее основания $12\sqrt{3}$ см, а боковое ребро – 15 см.

Вычислите площадь боковой поверхности конуса.

3. В конус вписана правильная треугольная пирамида. Сторона ее основания равна $6\sqrt{3}$ см. Высота пирамиды 10 см.

Вычислите объем конуса.

4. Правильная четырехугольная пирамида вписана в конус. Сторона основания пирамиды равна $5\sqrt{2}$ дм, а ее высота – 8 дм.

Вычислите объем конуса.

Уровень Б

1. Пирамида, основание которой – прямоугольный треугольник с острым углом $30°$,вписана в конус. Меньшая сторона основания пирамиды равна 12 см. Высота ее 16 см. Вычислите площадь боковой поверхности конуса.

2. В конус вписана правильная треугольная пирамида. Сторона основания равна 6 см, а боковое ребро - $4\sqrt{3}$ см.

Вычислите площадь боковой поверхности конуса.

3. Треугольная пирамида, площадь основания которой 192 см^2,а периметр – 48 см, описана около конуса. Высота пирамиды – 15 см.

Вычислите:

а) объем конуса;

б) площадь боковой поверхности конуса.

4. Около конуса описана пирамида, высота которой 12 дм. Основанием пирамиды является ромб со стороной 4 дм. Угол между плоскостями основания и боковой грани пирамиды равен 60°.

Вычислите:

а) объем конуса;

б) площадь полной поверхности конуса.

Уровень В

1. Пирамида, основанием которой является прямоугольная трапеция с большей боковой стороной $12\sqrt{2}$ см и острым углом $45°$, описана около конуса. Высота пирамиды 8 см.

Вычислите:

а)площадь полной поверхности конуса;

б) расстояние от центра основания конуса до плоскости боковой грани пирамиды.

2. Около конуса, высота которого равна 3 дм, описана пирамида. Ее основание – равнобокая трапеция с острым углом 60°. Периметр трапеции 48 см.

Вычислите:

а) площадь полной поверхности конуса;

б) угол при вершине осевого сечения конуса.

Задачи повышенной сложности

1. (ЕГЭ-2003, вариант 626). Внутри правильной пирамиды CABD с вершиной в точке C расположен конус, вершина которого является центром основания ABD. Основание конуса вписано в сечение пирамиды плоскостью, параллельной плоскости ABD и делящей боковое ребро AC в отношении 2:1, считая от вершины C.

Определите отношение объема пирамиды к объему этого конуса. *Ответ*. $81\sqrt{3}/4\pi$.

2. (ЕГЭ-2003, вариант 627-629). В четырехугольной пирамиде FABCD все двугранные углы при основании равны между собой, а ее основанием является ромб ABCD с острым углом 60°. Внутри этой пирамиды расположен конус так, что его вершина является точкой пересечения диагоналей ромба, а окружность основания конуса вписана в сечение пирамиды плоскостью, параллельной плоскости ABC и делящей боковое ребро FA в отношении 2:1, считая от вершины F.

Определите отношение объема этой пирамиды к объему конуса.

Раздел 7. Литература

1. Литвиненко В. Н. Сборник задач по стереометрии с методами решений: Пособие для учащихся. - М.: Просвещение, 1998.-255 с.: ил.

2. Звавич Л. И. Геометрия. 8- 11 кл.: Пособие для школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Дрофа, 2019. – 288 с.6 ил.

3. Звавич Л. И. Контрольные и проверочные работы по геометрии. 10 – 11 кл.: Метод. пособие / Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский, Е. В. Такуш. – М.: Дрофа, 2019. – 192 с.: ил.

4. Примерное тематическое планирование уроков повторения в 10 и 11 классах // Первое сентября. Математика. – 1999. - №16.- с. 6 – 8

5. Углубленное изучение математики 8 – 11 классы // Первое сентября. Математика. - 1996. – № 41.- с. 2 – 3

6. Углубленное изучение математики 8 – 11 классы // Первое сентября. Математика. - 1996. – № 44.- с. 2 – 3

7. Матизен В. Э. Равногранные и каркасные тетраэдры // Квант. – 1983. _ №7. – с.34 – 39

8. Сборник задач по геометрии для проведения устного экзамена в 9 и 11 кл. Пособие для учителя / Д. И. Аверянов, Л. И. Звавич, Б. П. Пигарев, А. Р. Рязановский. – М. Просвещение: Уч. лит., 2014. – 96 с.- ил.

9. Бовт Н. Повторяем – решая. Треугольники // Первое сентября. Математика. - 1995. – № 16.

10. Бовт Н. Повторяем – решая. Четырехугольники // Первое сентября. Математика. - 1995. – № 17.

11. Бовт Н. Повторяем – решая. Окружность // Первое сентября. Математика. - 1995. – № 18.

12. Гусев В. А., Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по элементарной математике. Планиметрия. – М.: Вербум – М, 2000, - 112 с.

13. Сборник задач по математике для поступающих во втузы: Учеб. Пособие / В. К. Егерев, др.; п.ред. М. И. Сканави.- М.: «Столетие», 1997. – 560 с.: ил.

14. Полонский В. Б., Рабинович Е. М., Якир М. С. Геометрия: Задачник к школьному курсу. – М.: Аст-Пресс: Магистр – S, 1998. – 256 с.

15. Шарыгин, Р. К. Гордин. – М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2016. – 400 с.: ил.

16. Зубелевич Г. Задачи на вычисление площадей треугольников и четырехугольников // Первое сентября. Математика. - 1995. – № 4, 10, 11, 14.

17. Селевко Г.К. Педагогические технологии на основе дидактического и методического усовершенствования УВП. М.: НИИ школьных технологий, 2015.

18. Программы авторских курсов для системы непрерывного образования: Сборник программ / Под общ. ред. Е.И.Шулевой. – Магнитогорск: МаГУ, 2005.

19. КИМ «ЕГЭ. Математика», 2012-2021 гг.